Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Ю. В. Жерновий

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Для студентів нематематичних спеціальностей

Львів
2014

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1.1. На вершину гори ведуть 7 доріг.

1) Скількома способами можна піднятись на гору, а потім спуститись з неї?
2) Розв'язати задачу за умови, що підйом і спуск відбувається різними дорогами.

1.2. В першості країни з футболу беруть участь 16 команд.

1) Скільки існує можливих послідовностей цих команд, складених у порядку спадання кількості очок після закінчення чемпіонату?
2) Скількома способами може бути розподілено 3 комплекти нагород?
3) Скільки існує можливих пар невдах, складених з команд, які зайняли два останні місця?

1.3. Скільки різних „слів", у тому числі беззмістовних, можна одержати, переставляючи букви у слові „математика"?

1.4. Скількома способами можна купити 8 тістечок, якщо у продажу є 6 різних сортів тістечок?

1.5. Скільки треба мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої з 5-ти мов (української, російської, англійської, німецької, французької) на будь-яку іншу з них?

1.6. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі 3-х осіб?

1.7. Скільки цілих невід'ємних чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр: А) 7; 8; 9; 0?   Б) 7; 8; 9?

1.8. У кімнаті n лампочок, кожна має свій вимикач. Скільки існує різних способів освітлення кімнати?

1.9. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі увійшли 5 чол. Кожен з них може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Скільки для цього існує різних способів?

1.10. Правління акціонерного товариства складається з голови правління, бухгалтера та юриста. Скількома способами можна обрати правління, якщо на місце голови є 5 претендентів, бухгалтера – 6, а юриста – 4 претенденти?

1.11. Банк випускає кредитні картки, кожна з яких має серію з трьох букв англійського алфавіту і номер з чотирьох цифр. Скільки можна випустити кредитних карток, використовуючи 26 букв англійського алфавіту, якщо відомо, що номера 0000 немає?

1.12. Скільки підмножин має множина, яка складається з n елементів?

1.13. Мале підприємство має ліцензію на проведення десяти видів комерційної діяльності. На початку роботи воно планує займатися чотирма видами. Скількома способами можна вибрати ці чотири види діяльності?

1.14. У камері схову встановлено кодовий замок, код якого складається з 4-х цифр. Скільки різних кодів можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо:

1) цифри у коді можуть повторюватися;
2) цифри у коді не повторюються;
3) код починається з цифри 3;
4) код – парне число;

5) код – парне число, цифри якого не повторюються?

1.15. Скільки тризначних цифр можна записати цифрами 0; 1; 2; 3; 4, якщо кожну з них використовувати не більше одного разу?

1.16. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

1.17. На першому курсі вивчають 10 предметів. У понеділок 4 пари, причому всі з різних предметів. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

1.18. Скільки партій буде зіграно на шаховому турнірі, якщо кожні двоє з 10-ти учасників зустрінуться лише по разу?

1.19. Комісія складається з голови, двох його заступників і ще чотирьох осіб. Скількома способами члени комісії можуть розподілити між собою обов'язки?

1.20. Скількома способами можна розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала по 5 предметів?

1.21. На книжковій полиці розміщено 10 томів. Скількома способами можна розставити їх так, щоб перший і другий томи не стояли поруч?

1.22. Скількома способами можна розставити 10 томів на полиці так, щоб перший, другий і третій томи стояли поруч у порядку зростання?

1.23. З 12-ти чоловік кожного дня протягом шести днів вибирають двох чергових. Визначити кількість різних можливих варіантів розкладу чергування на 6 днів, якщо кожна особа чергує лише один раз.

1.24. Скільки різних „слів" можна утворити, переставляючи букви у слові „комбінаторика"?

1.25. Скільки тризначних чисел, які діляться на 3, можна записати цифрами 0; 1; 2; 3; 4; 5, якщо кожне число не може мати однакових цифр?

1.26. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,...,2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

1.27. Скількома способами можна вибрати навмання 2 чорні і 3 білі кулі зі скриньки, що містить 10 чорних та 6 білих куль?

1.28. Студентові треба за 8 днів скласти 4 іспити. Скількома способами можна скласти розклад іспитів, якщо за день не дозволяється складати більше одного іспиту?

2. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

2.1. Нехай *A, B, C* –довільні події. За допомогою операцій над цими подіями або протилежними до них записати такі події:

1) з подій *A, B, C* відбулась лише *A*;
2) відбулись *A* і *B,* а *C* не відбулась;
3) всі 3 події відбулись;
4) відбулась хоча б одна з цих подій;
5) відбулись хоча б дві з цих подій;
6) відбулась одна і лише одна з цих подій;
7) відбулись дві і лише дві з цих подій;
8) не відбулась жодна з цих подій.

2.2. Шестигранний кубик кидають один раз. Перевірити закони де Морґана для подій: A={випала „1” або „6”}, B={випала „2” або „3”}.

2.3. Монету кидають двічі. Перевірити закони де Морґана для подій: A={хоча б один раз випав “герб”}, B={„цифра” не випала жодного разу}.

2.4. Чи утворюють повну групу подій події A і B в таких експериментах:

1) монету кидають двічі; події: A={„герб” випав двічі}, B={„цифра” випала двічі};
2) кубик кидають двічі; події: A={випало дві „шістки”}, B={не випало жодної „шістки”}?

2.5. Відносно заданих груп подій дати відповіді на такі питання: чи утворюють вони повну групу подій? Чи є вони попарно несумісними?

1) Кидання кубика один раз; події A={випала „одиниця” або „двійка”}, B={випала „двійка” або „трійка”}, C={випала „трійка” або „четвірка”}, D={випала „четвірка” або „п’ятірка”};
2) кидання монети двічі; події: A={„герб” випав двічі}, B={„цифра” випала двічі}, C={випали „герб” і „цифра”}.

2.6. Кубик кидають один раз. Для подій A={випало не менше трьох очок}, B={випало не більше трьох очок} знайти: AB, $A+B$, A-B, B-A.

2.7. Кубик кидають один раз. Для подій A={випала „двійка”, „четвірка” або „п’ятірка”}, B={випала „одиниця”, „трійка” або „четвірка”}, C={випала „одиниця”, „трійка” або „п’ятірка”} перевірити виконання рівності $(A+B)C=AC+BC$. Знайти події: A-B, B-A, A-C, C-A, B-C, C-B. Перевірити, чи утворюють події A, B, C повну групу подій.

3. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

3.1. Навмання вибирають одну цифру. Знайти ймовірність того, що вибрана цифра менша за 3.

3.2. Вибирають навмання 4 різних цифри від 1 до 9. Яка ймовірність, що серед вибраних цифр – 2 парні і 2 непарні?

3.3. Набираючи телефонний номер, абонент забув 2 останні цифри і набрав їх навмання, пам’ятаючи лише, що вони непарні і різні. Яка ймовірність, що номер набраний правильно?

3.5. У скриньці 10 куль: 3 білих і 7 чорних.

1) Навмання витягають одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля а) біла? б) чорна?
2) Яка ймовірність, що витягнуті навмання дві кулі – чорні?
3) Яка ймовірність, що серед п’яти витягнутих куль 3 чорні?

3.6. Кубик кидають 3 рази.

1) Яка ймовірність, що „шістка” випаде лише 1 раз?
2) Яка ймовірність випадання двох „шісток”?
3) Яка ймовірність випадання трьох „шісток”?
4) Яка ймовірність випадання хоча б одної „шістки”?
5) Яка ймовірність випадання одної „шістки” і одної „трійки”?

3.7. З колоди 36-ти карт навмання витягнули 10.

1) Яка ймовірність, що серед них є хоча б один туз?
2) Яка ймовірність, що серед них не менше двох тузів?

3.8. Кубик кидають 6 разів.

1) Яка ймовірність, що випадуть всі 6 граней?
2) Яка ймовірність, що випадуть три „одиниці”, дві „трійки” і одна „шістка”?

3.9. Кубик кидають 12 разів. Яка ймовірність, що випадуть дві „одиниці”, три „двійки”, чотири „трійки” та „четвірка”, „п’ятірка” і „шістка” – по одному разу?

3.10. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

3.11. 500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено у таблиці (на перетині клітинок „термін” і „сума” вказана кількість фірм, що отримали кредит на таких умовах).

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	< $ 2000	$ 2000-4999	$ 5000-7999	> $ 8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирають одну фірму.

1) Яка ймовірність, що сума кредиту цієї фірми не менша $ 5000?
2) Яка ймовірність, що термін кредиту фірми більший за 2 роки?
3) Яка ймовірність, що фірма взяла кредит на суму, не меншу $ 2000, на 42 місяці?

3.12. Вкладники банку за *сумами вкладів* та *віком* мають такий відсотковий розподіл:

Вік (роки)	Суми вкладу		
	< $ 1000	$1000-5000	> $ 5000
не більше 30	5%	15%	8%
31-50	8%	25%	20%
більше 50	7%	10%	2%

Нехай A, B – такі події: $A=\{$у навмання вибраного клієнта вклад більший за $ 5000$\}$, $B=\{$навмання вибраний клієнт старший 30-ти років$\}$. Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A+B)$.

3.13. У супермаркеті, аналізуючи 10000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка), виявлено такий відсотковий розподіл:

Тип	Тип товару, %

розрахунку	Жін. одяг	Чол. одяг	Спорттовари	Господтовари
Каса	6	9	3	7
Кредитна картка	41	9	22	3

Нехай A, B, C, D – такі події: A={навмання вибраний рахунок оплачений кредитною карткою}, B={навмання вибраний рахунок за жін. одяг}, C={навмання вибраний рахунок за чол. одяг}, D={навмання вибраний рахунок за спорттовари}. Визначити: $P(A)$, $P(AB)$, $P(AD)$, $P(A+B)$, $P(A+C)$.

3.14. Стержень довжиною l навмання розламали на 2 частини. Знайти ймовірність того, що довжина меншої частини не більша за $l/3$.

3.15. На перехресті встановлено автоматичний світлофор, на якому протягом 1 хв. горить зелене світло, 30 сек. – жовте, 1 хв. – червоне, 30 сек. – жовте, 1 хв. – зелене світло і т.д. У випадковий момент часу до світлофора під'їжджає автомобіль. Яка ймовірність того, що в цей момент буде горіти зелене світло?

3.16. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної мережі розірвався провід. Яка ймовірність того, що він розірвався між 45-м і 50-м кілометрами мережі?

3.17. Два пароплави повинні підійти для розвантаження до одного і того самого причалу. Їх поява біля причалу – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Час розвантаження кожного пароплава – 1 год. Знайти ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу.

3.18. На відрізку довжини l навмання вибирають дві точки. Знайти ймовірність того, що з трьох одержаних відрізків можна побудувати трикутник.

3.19. На площину, розграфлену паралельними прямими лініями, відстань між якими $2a$, навмання кидають голку довжини $2l$. Яка ймовірність того, що голка перетне одну з паралельних прямих, якщо $l<a$?

3.20. На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата a навмання кидають монету радіуса $r<a/2$. Знайти ймовірність того, що монета попаде цілком в середину квадрата.

3.21. Двоє студентів домовилися про зустріч. Кожен з них може прийти на місце зустрічі протягом 20 хв. За домовленістю студент, який прийшов на місце зустрічі першим, чекає 10 хв. і покидає місце зустрічі. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

4. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ПОДІЙ

4.1. Монету кидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що „герб" випаде 2 рази, використавши теореми додавання та множення ймовірностей.

4.2. Нехай $P(A)\geq 0{,}8$; $P(B)\geq 0{,}8$. Довести, що $P(AB)\geq 0{,}6$.

4.3. Користуючись теоремою додавання для двох подій, вивести формулу для ймовірності суми трьох подій.

4.4. У першій скриньці 5 білих і 10 чорних куль, у другій – 10 білих і 5 чорних. З кожної скриньки навмання витягнули по одній кулі. Знайти ймовірність, що витягнули хоча б одну білу кулю.

4.5. У скриньці 10 червоних та 6 синіх куль. Навмання витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що витягнуті кулі є одного кольору?

4.6. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або 2 і 5 одразу?

4.7. Студент прийшов на залік, знаючи відповідь на 24 питання з 30-ти. Яка ймовірність скласти залік, якщо після неправильної відповіді на питання, викладач задає ще одне питання?

4.8. Кубик кинули двічі. Знайти умовну ймовірність того, що випало дві „п’ятірки”, якщо відомо, що сума очок, що випали, ділиться на 5.

4.9. Зі скриньки, яка містить 3 білих і 7 червоних куль, навмання, послідовно і без повернення витягають 2 кулі. Для подій A={перша куля біла} і B={друга куля біла} знайти $P(A/B)$ і $P(B/A)$.

4.10. Відомо, що 5% чоловіків і 0,25% жінок – дальтоніки. Навмання вибрана особа – дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік, якщо кількість чоловіків і жінок однакова?

4.11. Кубик кидають двічі. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна „трійка”, якщо відомо, що сума очок, що випали, дорівнює 7?

4.12. Кубик кидають тричі. Яка ймовірність, що принаймні один раз випаде „шістка”, якщо випали різні грані?

4.13. Кинуто послідовно 3 монети. Визначити, залежні, чи незалежні події: A={випав „герб” на першій монеті}, B={випала хоча б одна „цифра”}.

4.14. Кинули монету і кубик. Визначити залежні, чи незалежні події: A={випав „герб”}, B={випала парна кількість очок}.

4.15. Кубик кидають двічі. Розглянемо події: A={при першому киданні випала парна кількість очок}, B={при другому киданні випала непарна кількість очок}, C={сума очок, що випали, непарне число}. Довести, що події A, B, C попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.

4.16. Імовірність влучання в ціль для першого стрільця рівна 0,8, а для другого – 0,6. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність, що в ціль влучить хоча б один з них?

4.17. Три студенти, незалежно один від одного, вимірюють деяку фізичну величину. Імовірність того, що перший допустить помилку під час зчитування показів приладу, рівна 0,1; для другого ця ймовірність – 0,15; для третього – 0,2. Знайти ймовірність того, що під час одноразового вимірювання хоча б один з дослідників допустить помилку.

4.18. В електричне коло послідовно увімкнено 3 елементи, які можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Імовірності відмови елементів за час T відповідно рівні 0,1; 0,15 і 0,2. Яка ймовірність того, що через час T струму в колі не буде?

4.19. Імовірність хоча б одного влучання в ціль за 3 постріли рівна 0,875. Знайти ймовірність влучання за один постріл.

4.20. Двоє мисливців зробили по одному пострілу в ціль. Імовірність влучання для них відповідно рівні 0,7 і 0,8. Знайти ймовірності того, що:
1) обидва влучили; 2) лише один влучив; 3) жоден не влучив; 4) хоча б один влучив.

4.21. Імовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми становить 0,7, для другої – 0,8. Знайти ймовірності того, що:
1) вчасно повернуть кредит обидві фірми; 2) поверне лише одна фірма; 3) жодна не поверне; 4) хоча б одна поверне.

4.22. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:
1) не менш як дві стандартні; 2) усі три нестандартні; 3) хоча б одна стандартна.

4.23. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга — із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:
1) лише одна стандартна; 2) лише дві стандартні.

4.24. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому – 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

4.25. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

5. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ІМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЄСА

5.1. Кидають монету. Якщо випаде „герб”, то витягають кулю з першої скриньки, у протилежному випадку – з другої. У першій скриньці 3 червоних і 1 біла куля, у другій – 1 червона і 4 білих.
1) Яка ймовірність того, що витягнута куля – червона?
2) Витягнули червону кулю. Яка ймовірність, що її витягнули з першої скриньки?

5.2. У першій скриньці 10 куль, з них – 8 білих. У другій – 20 куль, з них – 4 білих. З кожної скриньки навмання витягнули по одній кулі, а потім з двох витягнутих навмання вибрали одну кулю.
1) Знайти ймовірність, що вибрали білу кулю.
2) Вибрали білу кулю. Яка ймовірність, що з першої скриньки витягнули білу кулю і з другої – білу?

5.3. У першій скриньці 2 білих і 6 чорних куль. У другій – 4 білих і 2 чорних. З першої скриньки навмання переклали 2 кулі в другу, після чого з другої скриньки навмання витягнули одну кулю.
1) Яка ймовірність, що ця куля біла?

2) Куля, витягнута з другої скриньки, виявилась білою. Яка ймовірність, що з першої скриньки в другу переклали 2 білих кулі?

5.4. Серед 30-ти екзаменаційних білетів є 10 легших (на думку студентів). Двоє студентів підходять за білетами один за одним. У кого з них більша ймовірність витягнути легший білет?

5.5. Маємо N партій деталей, по n_i деталей у кожній. Відомо, що серед n_i деталей m_i стандартних $\left(i=1,2,...,N\right)$. Із навмання взятої партії беремо одну деталь. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь: а) стандартна; б) нестандартна.

5.6. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий — з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

5.7. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45%, а другий — 55% деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого — 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

5.8. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб з тої самої партії також буде стандартним.

6. ЗАДАЧІ НА СХЕМУ БЕРНУЛЛІ. НАЙІМОВІРНІША КІЛЬКІСТЬ УСПІХІВ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

6.1. Імовірність влучання в ціль для стрільця за один постріл рівна 0,8. Стрілець зробив 4 постріли. Знайти імовірності того, що він влучив у ціль k разів (k=0, 1, 2, 3, 4). Знайти найімовірнішу кількість влучань за 4 постріли. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості влучань за 4 постріли.

6.2. Монету кидають 50 разів. Знайти найімовірнішу кількість випадань „герба”.

6.3. Кубик кидають 35 разів. Знайти найімовірнішу кількість випадань „шістки”.

6.4. Монету кидають 3 рази. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань „герба”.

6.5. Кубик кидають 3 рази. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань „шістки”.

6.6. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають 3 кулі. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль.

6.7. Прилад складається з 5-ти малонадійних деталей. Відмови деталей незалежні, а ймовірності відмови за час T відповідно рівні 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 і 0,6. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості деталей, що вийшли з ладу за час T.

6.8. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають одну кулю, потім кладуть назад у скриньку. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль у 4-х таких експериментах.

6.9. З колоди 36-ти карт навмання витягнули 10. Яка ймовірність, що серед них є хоча б один туз (подія A)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події A у 20-ти таких експериментах.

6.10. Довести, що математичне сподівання дискретної випадкової величини, яка може набувати скінченну кількість значень, міститься між її найменшим і найбільшим можливими значеннями.

6.11. Кидають 10 кубиків. Знайти математичне сподівання і дисперсію суми очок, які випадуть на всіх кубиках.

6.12. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X задана у вигляді:

$$p(x)=\begin{cases}1/2l, & |x-a|\le l;\\ 0, & |x-a|>l.\end{cases}$$

Знайти $E(X)$ і $D(X)$.

6.13. Перевірити, чи функція

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини. Знайти відповідну функцію розподілу.

6.14. Знайти значення a, при якому функція

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,\pi);\\ a\sin x, & x\in(0,\pi)\end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини. Знайти відповідну функцію розподілу.

6.15. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей : 1) усі три стандартні; 2) не більш як одна нестандартна; 3) принаймні одна нестандартна.

6.16. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

6.17. З умов випуску лотереї відомо, що виграшними є 1/40 всіх випущених лотерейних квитків. Яка ймовірність, що з 200 куплених лотерейних квитків виграшними будуть 5? Не менше 5-ти?

6.18. Кубик кидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що „двійка" випаде 900 разів.

6.19. Монету кидають 100 разів. Яка ймовірність того, що кількість випадань „герба" буде в межах від 45 до 55?

6.20. Підприємство виробляє 99,2% стандартних виробів. Яка ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів кількість нестандартних не більша за 50?

6.21. Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обриву пряжі в кожному з веретен за час *T* становить 0,005. Знайти ймовірність того, що за час *T* буде більше 10-ти обривів.

6.22. Знайти ймовірність того, що серед 10000 деталей буде 40 бракованих, якщо ймовірність браку для одної деталі становить 0,005.

6.23. У перші класи мають прийняти 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться 100 хлопців, якщо ймовірність народження хлопця становить 0,515.

6.24. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента за час *T* рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що за час *T* відмовлять 3 елементи.

6.25. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

6.26. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

6.27. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

6.28. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

6.29. Маємо три партії деталей. Перша складається з 9 стандартних і 3 нестандартних; друга – із 12 стандартних і 3 нестандартних; третя – із 18 стандартних і 9 нестандартних деталей. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірності того, що в партії буде 0, 1, 2, 3 стандартні деталі. **Вказівка.** Якщо проводяться *n* незалежних випробувань, в яких подія *A* відбувається з імовірністю $p_i\left(i=1,2,...,n\right)$, то ймовірність настання цієї події *k* разів визначається за допомогою твірної функції $\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(p_i z+q_i)$. Якщо перетворити праву частину функції і звести подібні члени, то коефіцієнт при z^k визначає $P_n\left(k\right)$.

6.30. Під час дослідження легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, рівна 0,01. Обчислити, скільки в середньому треба дослідити зразків, щоб з імовірністю 0,95 вказаний ефект спостерігався хоча б один раз.

6.31. Імовірність того, що куплений лотерейний квиток є виграшним p=0,01. Скільки треба купити квитків, щоб серед них був хоча б один виграшний з імовірністю не меншою, ніж 0,98?

6.32. Середня кількість викликів, що надходять на АТС за 1 хв, рівна 120. Яка ймовірність того, що за 2 сек на АТС не надійде жодного виклику? Менше двох викликів?

6.33. Кубик кидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що відносна частота випадання „шістки" відхилиться від імовірності p=1/6 не більше, ніж на 0,01.

6.34. Скільки разів треба кинути кубик, щоб з імовірністю 0,997 відносна частота випадання „шістки" відхилилася від імовірності p=1/6 не більше, ніж на 0,001.

6.35. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання не менше, ніж на 3 середні квадратичні відхилення.

6.36. Імовірність появи події A в кожному випробуванні p=0,5. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що кількість появ події A міститиметься в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

6.37. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X-E(X)|<0{,}2$, якщо $D(X)=0{,}004$.

6.38. Імовірність появи події A в кожному випробуванні p=0,25. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що кількість появ події A міститиметься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 незалежних випробувань.

6.39. Імовірність вчасної реалізації одиниці продукції p=0,4. Оцінити ймовірність того, що для ста (100) незалежно реалізованих одиниць продукції відхилення відносної частоти реалізації від імовірності p за модулем буде меншим від 0,1 та порівняти оцінку з безпосередньо знайденим значенням імовірності.

6.40. Середній дохід на душу населення X розподілений за нормальним законом з параметрами a, σ. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність $P\{|X-a|\geq 2\sigma\}$ та порівняти оцінку з безпосередньо знайденим значенням імовірності.

6.41. Кубик кидають двічі. Нехай X – кількість випадань „шістки", Y – кількість невипадань „шістки". Знайти коваріацію випадкових величин X і Y, коефіцієнт кореляції між ними і записати рівняння прямої регресії Y на X.

6.42. Монету кидають двічі. Нехай X – кількість випадань „герба", Y – кількість випадань „цифри". Знайти коваріацію випадкових величин X і Y, коефіцієнт кореляції між ними і записати рівняння прямої регресії Y на X.

6.43. X – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(-1,1)$, $Y=X^2$. Знайти коваріацію випадкових величин X і Y та коефіцієнт кореляції між ними.

6.44. X – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(-1,1)$, $Y=X^3$. Знайти коваріацію випадкових величин X і Y, коефіцієнт кореляції між ними і записати рівняння прямої регресії Y на X.

6.45. X – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(-1,1)$, $Y=X^5$. Знайти коваріацію випадкових величин X і Y, коефіцієнт кореляції між ними і записати рівняння прямої регресії Y на X.

6.46. Імовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості заготовок, витрачених на виготовлення одної стандартної деталі.

6.47. Проводяться незалежні випробування, в кожному з яких імовірність появи події A рівна p, а ймовірність її непояви відповідно рівна $q=1-p$. Випробування завершуються, як тільки відбудеться подія A. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості випробувань, які треба провести до першої появи події A.

6.48. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості кидань монети до першої появи «герба».

6.49. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості кидань кубика до першої появи «шістки».

6.50. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p=0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

6.51. Задано функцію

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1; \\ ax^2+bx, \text{ якщо } 1<x\le 4; \\ 1, \text{ якщо } x>4. \end{cases}$$

Довести, що можна підібрати такі значення a і b, при яких $F(x)$ буде функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Знайти $P\{2\le X<3\}$.

6.52. Випадкову величину X задано на інтервалі $(a;4)$ зі щільністю розподілу $f(x)=Ax^2$. Знайти a і A, якщо $E(X)=0$.

6.53. Випадкова величина X розподілена рівномірно на $(a;b)$. Знайти щільність її розподілу, якщо $P\{X\ge 3\}=0,4$, а $E(X)=2$.

6.54. Похибка X, допущенна при вимірюванні довжини, розподілена нормально з $a=0,5$ мм і $\sigma=0,4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 1 мм.

6.55. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт. год.

А) Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт. год.

Б) Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт. год.

6.56. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Випадкова величина X_k може набувати значень $-\sqrt{k}$, 0, $\sqrt{k}$ з імовірностями, що дорівнюють відповідно $\frac{1}{k+1}$, $1-\frac{2}{k+1}$, $\frac{1}{k+1}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

6.57. Контролер перевіряє деякі вироби. На першому етапі перевірки, який триває 10 с, він або відразу оцінює виріб, або приймає рішення, що перевірку треба повторити. Повторна перевірка триває 10 с, у результаті чого обов'язково приймається рішення про якість продукції. Знайти ймовірність того, що за семигодинний робочий день контролер перевірить понад 1800 виробів; понад 1640 виробів; не менш як 1500 виробів. Передбачається, що кожний виріб незалежно від інших з імовірністю 0,5 проходить повторну перевірку.

7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

7.1. Побудувати статистичний розподіл вибірки, записати емпіричну функцію розподілу та обчислити такі числові характеристики: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, підправлену дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, підправлене середнє квадратичне відхилення, розмах вибірки, медіану, моду, квартильне відхилення, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес для вибірки:

7; 6; 7; 10; 9; 8; 11; 6; 5;10; 8; 7; 6; 9; 8; 10; 7; 10; 12; 7.

7.2. Зв'язок між ознаками *X* і *Y* генеральної сукупності задається таблицею:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Y	29	32	33	36	37	40	41	44	45	48

Записати вибіркове рівняння прямої регресії *Y* на *X*.

7.3. Знайти інтервал довіри для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки *X* генеральної сукупності:

1) якщо γ=0,95, генеральне середнє квадратичне відхилення σ=3,0, вибіркове середнє $\overline{x}$=20,02, а обсяг вибірки n=36;
2) якщо γ=0,95, підправлене середнє квадратичне відхилення s=0,8, вибіркове середнє $\overline{x}$=20,2, а обсяг вибірки n=16.

7.4. Знайти інтервал довіри для оцінки з надійністю γ=0,99 невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої ознаки *X* генеральної сукупності, якщо обсяг вибірки n=15, а підправлене середнє квадратичне відхилення s=0,12.

8. ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.1. Для сигналізації про аварію встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно. Імовірність того, що під час аварії сигналізатор спрацює, рівна 0,97 для першого сигналізатора, 0,72 для другого, 0,91 для третього і 0,8 для четвертого. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює лише один сигналізатор.

8.2. Імовірність одного влучання в ціль за один залп з трьох гармат рівна 0,188. Знайти ймовірність влучання в ціль за один постріл першою з гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність рівна 0,7, а для третьої 0,8.

8.3. Студент встиг підготувати до екзамену 25 питань з 30-ти. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних питань він знає хоча б одне?

8.4. Прилад складається з чотирьох елементів, які працюють незалежно. Імовірності безвідмовної роботи (за час T) першого, другого, третього і четвертого елементів відповідно рівні 0,75; 0,85; 0,95 і 0,88. Знайти ймовірність того, що за час T безвідмовно буде працювати лише один елемент.

8.5. На стелажі у випадковому порядку розставлено 17 підручників, причому 12 з них мають тверді обкладинки. Бібліотекар бере навмання 7 підручників. Знайти ймовірність того, що хоча б один з взятих підручників має тверді обкладинки.

8.6. Імовірність того, що під час одного вимірювання деякої фізичної величини буде допущена похибка, яка перевищує задану точність, рівна 0,7. Проведено 4 незалежних вимірювання. Знайти ймовірність того, що з лише в одному з них допущена похибка перевищить задану точність.

8.7. Імовірність хоча б одного влучання в ціль за три постріли рівна 0,992. Знайти ймовірність влучання в ціль за один постріл.

8.8. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний, рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що з чотирьох перевірених виробів лише один стандартний.

8.9. Імовірність успішного виконання вправи для кожного з трьох спортсменів рівна 0,7. Спортсмени виконують вправу по черзі, причому кожен робить по 2 спроби. Той спортсмен, який першим виконає вправу, отримує приз. Знайти ймовірність того, що спортсмени отримають приз, якщо кожен обов'язково робить по 2 спроби незалежно від результатів виконання вправи.

8.10. Для знищення мосту достатньо влучання в нього одної авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде знищено, якщо на нього скинути 5 бомб, імовірності влучання яких відповідно рівні: 0,2; 0,4; 0,5; 0,7 і 0,9.

8.11. У скриньку, яка містить 3 кулі, поклали білу кулю, після чого з неї навмання витягнули одну кулю. А)Знайти ймовірність того, що витягнута куля – біла, якщо рівноймовірні всі можливі припущення про початковий вміст білих куль. Б)Витягнута куля – біла. Яка ймовірність того, що у скриньці спочатку було 3 білих кулі?

8.12. Два автомати виготовляють однакові деталі, які потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивність першого автомата утричі більша від продуктивності другого. Перший автомат виготовляє в середньому 65% деталей відмінної якості, а другий – 83%. А)Яка ймовірність того, що навмання взята з конвейєра деталь має відмінну якість? Б) Навмання взята з конвейєра деталь має відмінну якість. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим автоматом.

8.13. У піраміді 10 гвинтівок, з них 3 мають оптичний приціл. Імовірність того, що стрілець вразить ціль, стріляючи з гвинтівки з оптичним прицілом, рівна 0,9; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність рівна 0,85. А)Знайти ймовірність того, що стрілець вразить ціль з навмання взятої гвинтівки. Б)Стрілець вразив ціль з навмання взятої гвинтівки. Яка ймовірність того, що він стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом?

8.14. В ящику міститься 13 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей, виготовлених на заводі №2 і 17 деталей - на заводі №3. Імовірність того, що деталь, виготовлена на заводі №1, відмінної якості, рівна 0,8; для деталей, виготовлених на заводах №2 і №3, ці ймовірності відповідно рівні 0,7 і 0,9. А) Яка ймовірність того, що витягнута навмання деталь має відмінну якість? Б) Навмання витягнута деталь має відмінну якість. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на заводі №2.

8.15. У фізичній лабораторії є 7 приладів, виготовлених на заводі А, і 3 прилади, виготовлені на заводі В. Імовірність того, що за час виконання досліду прилад заводу А не вийде з ладу, рівна 0,9; для приладу заводу В ця ймовірність 0,85. А) Знайти ймовірність того, що за час виконання досліду за допомогою приладу, вибраного навмання, цей прилад не вийшов з ладу. Б)За час виконання досліду за допомогою приладу, вибраного навмання, прилад не вийшов з ладу. Яка ймовірність того, що дослід виконано за допомогою приладу заводу А?

8.16. У кожній з двох скриньок міститься 7 чорних і 3 білих кулі. З першої скриньки навмання витягнули одну кулю і переклали в другу скриньку, після чого з другої скриньки навмання витягнули одну кулю. А)Яка ймовірність того, що витягнута з другої скриньки куля виявилася білою? Б)Навмання витягнута з другої скриньки куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що з першої скриньки була витягнута чорна куля.

8.17. У спеціалізовану лікарню поступають в середньому 40% хворих із захворюванням К, 35% – із захворюванням L, 25% – із захворюванням М. Імовірність повного вилікування хвороби К рівна 0,6; для хвороб L і М ці ймовірності відповідно рівні 0,7 і 0,9. А)Яка ймовірність того, що хворий, який поступив у лікарню, був виписаний здоровим? Б)Хворий, який поступив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав хворобою К.

8.18. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, рівна 0,75, а до другого – 0,25. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, рівна 0,8, а другим – 0,89. А)Знайти ймовірність того, що під час перевірки стандартний виріб буде визнано стандартним. Б)Під час перевірки стандартний виріб був визнаний стандартним. Яка ймовірність того, що виріб перевірив другий товарознавець?

8.19. У цеху працює 20 станків, серед яких 8 марки А, 7 – марки В і 5 – марки С. Імовірність того, що якість буде відмінною, для станків цих марок відповідно рівна 0,6; 0,9 і 0,7. А)Яка ймовірність того, що навмання взята деталь матиме відмінну якість? Б) Навмання взята деталь має відмінну якість. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на станку марки А.

8.20. З колоди 36-х карт навмання витягнули 12 карт. Яка ймовірність того, що серед них 8 будуть чорними (подія А)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А в 15-ти таких експериментах.

8.21. Колоду карт, яка складається з 24-ох карт, навмання розділили на 2 рівні частини. Яка ймовірність того, що в обидвох частинах виявиться однакова кількість чорних і червоних карт (подія А)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А в 20-ти таких експериментах.

8.22. З 36-ти карт витягнули 15. Яка ймовірність того, що серед них буде не менше трьох королів (подія А)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А в 5-ти таких експериментах.

8.23. У скриньці 10 кульок з номерами від 1 до 10. Навмання витягнули 5 кульок. Яка ймовірність того, що серед витягнутих кульок виявиться кулька з номером 1 (подія А)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А в 10-ти таких експериментах.

8.24. У студентській групі 12 хлопців і 13 дівчат. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання 9 студентів є 3 хлопці (подія А). Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А, якщо експеримент з відбору студентів проводять 20 разів.

8.25. Шестигранний кубик кинули 18 разів. Знайти ймовірність того, що випало 9 шісток і 9 трійок (подія А). Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А в 5-ти таких експериментах.

8.26. Пристрій складається з 7-ми елементів, з яких 4 зношені. Під час вмикання пристрою вмикаються випадковим чином 5 елементів. Знайти ймовірність того, що увімкненими виявляться 3 зношені елементи (подія А). Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А, якщо експеримент проводиться 10 разів.

8.27. Шестигранний кубик кинули 6 разів. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань “шістки”.

8.28. Монету кинули 7 разів. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань “герба”.

8.29. У сім’ї четверо дітей. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості дівчат, якщо ймовірність народження дівчини 0,49.

8.30. Два рівносильні шахісти грають у шахи. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості виграшів одного з них в 7-и партіях. Нічиї до уваги не беруться.

8.31. У скриньці 3 білих і 7 червоних кулі. Навмання витягають одну кулю, потім повертають назад у скриньку. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль, якщо експеримент проводять 5 разів.

8.32. У піраміді 12 гвинтівок, з яких 4 мають оптичний приціл. Навмання вибирають одну гвинтівку, потім кладуть назад у піраміду. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих гвинтівок з оптичним прицілом, якщо експеримент проводять 4 рази.

8.33. У фізичній лабораторії є 7 приладів, виготовлених на заводі А і 4 прилади, виготовлені на заводі В. Навмання вибирають один прилад. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості вибраних приладів, виготовлених на заводі А, якщо експеримент проводять 4 рази.